



# بررسی نظری و تجربی تحلیل جاپای تایر رادیال ۱۸۵/۶۵R۱۴ با طرح رویه به کمک روش اجزای محدود

میرحمید رضا قریشی\*، مجتبی ابطحی

تهران، پژوهشگاه پلیمر و پتروشیمی ایران، صندوق پستی ۱۴۹۶۵/۱۱۵

دریافت: ۸۶/۹/۵، پذیرش: ۸۶/۹/۱۲

## چکیده

این کار پژوهشی اختصاص به تحلیل جاپای یک تایر رادیال اندازه ۱۸۵/۶۵R۱۴ زیر بار عمودی ایستا با استفاده از روش اجزای محدود دارد. دو مدل از تایر ساخت شد که در مدل اول از طرح رویه صرف نظر و در مدل دوم جزئیات رویه تایر در نظر گرفته شد. از دو مدل مکانیکی کشسان خطی و ابرکشسان آرودا - بویس نیز برای بیان رفتار تنش - کرنش مواد تقویت کننده و بخش های لاستیکی استفاده شد که پارامترهای هر مدل به کمک آزمون کشش تعیین شدند. دو مدل اجزای محدود گفته شده زیر فشار باد داخلی و بار عمودی ایستا تحلیل شد که فرایند تحلیل مدل با طرح رویه در دو حالت با و بدون در نظر گرفتن اصطکاک بین سطوح رویه و تماس صورت پذیرفت. در هر مرحله از بارگذاری نتایج به دست آمده با داده های تجربی مقایسه شد تا دقت و صحت مدل های ایجاد شده تعیین شود. در این کار نشان داده شد که تحلیل اجزای محدود یک تایر بدون در نظر گرفتن اثر طرح رویه نه تنها نیاز به زمان اجرا و منابع سخت افزاری کمتری دارد و از این لحاظ اقتصادی تر است، بلکه تفاوت نتایج مربوط به تغییر شکل های پیش بینی شده بین دو مدل یاد شده نیز چندان محسوس نیست. اما، دقت نتایج در خصوص پارامترهای پیچیده تر نظیر شکل و مساحت ناحیه جاپا و توزیع فشار تماس نه تنها به مدل اجزای محدود ناحیه رویه تایر وابستگی فراوان دارد، بلکه در نظر گرفتن پدیده اصطکاک نیز اثر بسزایی روی نتایج دارد.

## واژه های کلیدی

تایر رادیال،  
روش اجزای محدود،  
طرح رویه، تحلیل جاپا،  
مدل آرودا - بویس

\*مسئول مکاتبات، پیام نگار:

[m.h.r.ghoreishy@ippi.ac.ir](mailto:m.h.r.ghoreishy@ippi.ac.ir)

## A Theoretical and Experimental Study on the Footprint Analysis of a 185/65R14 Radial Tyre with Tread Pattern Using Finite Element Method

M.H.R. Ghoreishy\* and M. Abtahi

Iran Polymer and Petrochemical Institute, P.O. Box: 14965/115, Tehran, Iran

### Abstract

This research work is devoted to the footprint analysis of a steel-belted radial tyre (185/65R14) under vertical static load using finite element method. Two models have been developed in which in the first model the tread patterns were replaced by simple ribs while the second model was consisted of details of the tread blocks. Linear elastic and hyper elastic (Arruda-Boyce) material models were selected to describe the mechanical behavior of the reinforcing and rubbery parts, respectively. The above two finite element models of the tyre were analyzed under inflation pressure and vertical static loads. The second model (with detailed tread patterns) was analyzed with and without friction effect between tread and contact surfaces. In every stage of the analysis, the results were compared with the experimental data to confirm the accuracy and applicability of the model. Results showed that neglecting the tread pattern design not only reduces the computational cost and effort but also the differences between computed deformations do not show significant changes. However, more complicated variables such as shape and area of the footprint zone and contact pressure are affected considerably by the finite element model selected for the tread blocks. In addition, inclusion of friction even in static state changes these variables significantly.

### Key Words

radial tyre,  
finite element method,  
tread pattern, footprint analysis ,  
Arruda-Boyce model

(\* To whom correspondence should be addressed.

E-mail: [m.h.r.ghoreishy@ippi.ac.ir](mailto:m.h.r.ghoreishy@ippi.ac.ir)

## مقدمه

تایر سازه‌ای کامپوزیتی است که ساختار آن متشکل از مواد با خواص فیزیکی و مکانیکی مختلف و تا حدی متناقض نظیر لاستیک، فولاد و نخ‌های پلیمری است. انتخاب نوع مناسب هر یک از این مواد به همراه مهندسی قرارگیری این اجزا در کنار هم به نحوی که پاسخ مناسبی برای نیازهای یک خودروی مدرن باشد را می‌توان مهم‌ترین رکن طراحی این محصول پیچیده دانست. در این میان مهم‌ترین عنصر کلیدی در دست‌یابی به طرحی بهینه و موفق آگاهی از ارتباط بین خصوصیات اجزای تشکیل‌دهنده و ساختار انتخابی با چگونگی کارایی آن در شرایط مختلف بارگذاری و کاربری است. استفاده از مدل ریاضی برای دست‌یابی به این مهم که تجلی آن در قالب کاربرد روش اجزای محدود در شبیه‌سازی رایانه‌ای تایر نمود یافته است همواره یکی از مباحث اصلی و چالش برانگیز در حیطه مهندسی لاستیک و تایر به شمار می‌آید. شبیه‌سازی رایانه‌ای تایر به روش اجزای محدود مقوله‌ای بسیار مفصل بوده که بررسی آن از حوصله این مقاله خارج است.

هدف این کار پژوهشی بررسی مدل‌سازی تایر با در نظر گرفتن جزئیات طرح رویه (tread pattern) است. نگاهی اجمالی به روند کاربرد روش اجزای محدود در شبیه‌سازی تایر طی سه دهه گذشته به خوبی مبین این نکته است که در نظر گرفتن طرح رویه از جمله مشکل‌ترین و پرزحمت‌ترین بخش کار در مدل‌سازی تایر به شمار می‌آید. در حقیقت تفاوت فراوان در هندسه اجزای تشکیل‌دهنده رویه با سایر بخش‌های تایر نظیر لایه‌ها، بت و دیواره جانبی (side-wall) موجب بروز چنین مشکلی می‌شود. از سوی دیگر تعداد درجات آزادی در یک مدل ساده با مدلی که در آن طرح رویه در نظر گرفته شده تفاوت فراوانی دارد و این موضوع موجب می‌شود تا تحلیل مدل‌های تایر با طرح رویه نیاز به زمان اجرای بیشتر، پردازنده‌های مرکزی قوی‌تر و حافظه بیشتر داشته باشد که خود موجب ایجاد دشواری‌های مضاعفی می‌شود. بنابراین، تقابلی بین مدل سه بعدی ساده که در آن از طرح رویه صرف نظر شده (یا حداکثر چند خط ساده یا rib در نظر گرفته شده) با مدل‌های پیچیده با طرح رویه وجود دارد. بدین معنی که مدل‌های ساده را می‌توان سریع‌تر ایجاد و تحلیل آنها را با صرف زمان و هزینه کمتر به انجام رسانید. در حالی که ساخت مدل‌های پیچیده مستلزم صرف زمان بیشتر بوده و اجرای آنها پرهزینه‌تر و طولانی‌تر می‌شود. اساساً کار اصلی در ایجاد مدل ساده تایر (بدون طرح رویه) تنها در ساخت مدل دوبعدی آن نهفته بوده که در آن لازم است تا شبکه اجزای محدود یک دست و همخوان ایجاد شده و نواحی پیچیده و پردردسر آن با دقت کافی به زبان اجزای محدود بیان شود. اما، پس از آن با فرض وجود

تقارن محوری (البته از نوع هندسی) می‌توان مدل سه بعدی تایر را با چرخش صفحه‌ای که مدل دو بعدی در آن ایجاد شده حول محور دوران تایر به آسانی تولید و فرایند تحلیل را در شرایط مختلف بارگذاری آغاز کرد. اما، این روند برای مدل تایر با طرح رویه پذیرفته نیست، چرا که ساختار طرح رویه تایر متقارن محوری (axisymmetric) نیست و لازم است تا شبکه اجزای محدود آن از ابتدا با ساختاری کاملاً سه بعدی ایجاد شود. بنابر این، بین آن بخشی از مدل که در آن طرح رویه وجود ندارد (لایه‌ها، دیواره جانبی و ...) و مدل اجزای محدود، بخش طرح رویه از لحاظ نحوه اتصال اجزا عدم همخوانی به وجود می‌آید که در نظر داشتن آن موقع محاسبات ضروری است. همچنین، نوع اجزای به کار برده شده نیز از دیگر جنبه‌های مهم این موضوع به شمار می‌آید. عموماً از اجزای سه بعدی شش وجهی (نظیر اجزای ۸ گره‌ای یا ۲۰ گره‌ای) برای مدل‌سازی بخش‌های مختلف تایر استفاده شده که نحوه فرمول‌بندی مسئله و پاسخ‌های حاصل از این نوع اجزا جواب‌های قابل قبولی می‌دهند. اما، از طرف دیگر به دلیل هندسه پیچیده طرح رویه تایر استفاده از اجزای گفته شده همواره میسر نیست. اجزای چهار وجهی (۴ گره‌ای یا ۱۰ گره‌ای) قابلیت بسیار خوبی در مدل کردن سازه‌ها و قطعات پیچیده دارند و به همین دلیل به ناچار باید برخی از اجزای طرح رویه را از این طریق مدل کرد. اما، این اجزا به دلیل تقریب خطی مورد استفاده به ویژه در حالتی که باید از فرمول‌بندی هیبریدی به دلیل رفتارهای ابرکشسان (hyper-elastic) اجزای لاستیکی به کارگرفت، جواب‌های چندان قابل قبول و مطمئنی نمی‌دهند و حتی در برخی موارد به ویژه در مسائل سطح تماس رسیدن به جواب‌های همگرا در حل معادلات غیرخطی ناممکن می‌شود. در ادامه این مقاله ابتدا فعالیت‌های انجام شده در این حیطه مرور می‌شود که عمدتاً معطوف به ده تا پانزده سال گذشته است و طی آن ضمن بررسی روش‌های مختلف مدل‌سازی تایر با طرح رویه، مزایا و معایب آنها بحث و بررسی می‌شود. به دنبال آن جزئیات مدل‌سازی سه بعدی یک تایر رادیال ۱۸۵/۶۵R۱۴ با طرح رویه انتخابی به کمک یک روش جدید مدل‌سازی هندسی سه بعدی که در این کار ابداع شده به همراه نتایج حاصل از تحلیل آن زیر بار عمودی ایستا (تحلیل جابا، footprint) ارائه می‌شود. داده‌های به دست آمده سپس با مقادیر تغییر مکان و سطح جابای (footprint area) اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه و نیز نتایج حاصل از تحلیل مدل سه بعدی بدون طرح رویه تایر مقایسه و در خصوص دقت و کارایی مدل‌ها بحث می‌شود. مهم‌ترین جنبه نوآوری این کار را می‌توان در ابداع شیوه‌ای جدید برای ساخت مدل سه بعدی اجزای محدود یک تایر با طرح رویه و همچنین تحلیل اجزای محدود جابا با اندازه ۱۸۵/۶۵R۱۴ دانست.

## مروری بر شبیه سازی های انجام شده تایر با طرح رویه

از میان کارهای انجام شده در زمینه مدل سازی تایر با طرح رویه می توان به مقاله گال و همکاران [۱] اشاره کرد. ایشان در این مقاله شبیه سازی سه بعدی تایر با طرح رویه را با هدف بررسی روش کلی - جزئی (global/local) مورد توجه قرار داده و نشان دادند که استفاده از روش کلی - جزئی به دلیل آن که در آن اثر برهم کنش بین رویه و سایر اجزا که عمدتاً بلت و لایه نهایی (Cap Ply) هستند، صرف نظر می شود، نتایج متفاوتی به دست می دهد. روش کلی - جزئی فنی است که در آن ابتدا تایر به طور کامل به همراه تمام اجزا ولی بدون در نظر گرفتن جزئیات طرح رویه مدل می شود. سپس، آن بخش از تایر که در تماس با زمین قرار گرفته به عنوان مدلی مجزا شبکه بندی شده و جداگانه تحلیل می شود. در طی این تحلیل نتایج حاصل از مدل تایر اولیه (که اصطلاحاً مدل کلی خوانده می شود) به عنوان شرط مرزی برای مدل جدید (یعنی تایر با طرح رویه که به آن مدل جزئی نیز می گویند) به کار گرفته می شود. در بخشی از مقاله یاد شده به بررسی این مسئله پرداخته و توجه خواننده به خطاهایی که ممکن است در صورت استفاده از روش کلی - جزئی ایجاد شود، معطوف می شود. روش کلی - جزئی به دلیل آن که جزئیات رویه تنها در مدلی کوچک تر بررسی می شود، نیاز به زمان اجرا و منابع سخت افزاری کمتری نسبت به یک مدل کامل با تمام جزئیات دارد. از این رو، برخی تحلیل گران آن را روشی مرجع می دانند. کامپاناک و همکاران [۲] به شبیه سازی ارتعاشات در تائیری غلطان با در نظر گرفتن طرح رویه پرداخته و نظریه های مختلف موجود در زمینه ارتعاشات و محاسبات مربوط را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. مانکوسو و همکاران [۳] یک مدل ریاضی سه بعدی را برای تحلیل تایر ابداع کردند. در این مدل رفتار فرمان پذیری (handling) و راحتی (ride) تایر بررسی شد. مدل ایشان از دو بخش سازه ای و ناحیه تماس تشکیل شده و در آن از دو حالت پایدار زمانی و وابسته به زمان برای تحلیل تایر در شرایط مختلف استفاده شد.

بحث آب پیمایی (hydroplaning) یا حرکت تایر روی آب (و سطوح خیس) از جمله مواردی است که در نظر گرفتن اثر طرح رویه در آن بسیار حائز اهمیت است. این موضوع در کار ستا و همکاران [۴] مورد بررسی قرار گرفت. ایشان از یک مدل اجزای محدود برای مدل سازی تایر و مدل حجم محدود برای شبیه سازی جریان آب استفاده کردند. همچنین، ایشان از روش کلی - جزئی برای سنجش پارامتری طرح های مختلف طرح رویه تایر به هنگام مواجهه با آب استفاده کردند. شیرایشی و همکاران [۵] دو مدل اجزای محدود کامل از یک تایر سواری ۲۳۵/۴۵R۱۷ و یک تایر سنگین ۱۱R۲۲/۵ ایجاد کردند که در شرایط کاملاً

دینامیکی به کمک نرم افزار LS-DYNA و به شکل صریح (explicit) شبیه سازی شد. با استفاده از چنین مدل های جامعی آنها توانستند اثر بار وارده، زمان و زاویه لغزش را روی نیروی جانبی مورد مطالعه قرار دهند. همچنین، اثر طرح رویه روی فرسایش پذیری تایر را نیز بررسی کردند. در ضمن آنها، اثر رویه در یک تایر ۱۹۵/۶۵R۱۴ با طرح گل برقی را با هدف سنجش کارایی آن در شرایط یخی و لغزنده مطالعه کردند.

اوکانو و کویچی [۶] نیز مسئله آب پیمایی را به کمک دو روش اجزای محدود برای تایر و حجم محدود برای جریان آب مطالعه کردند. در این کار اثر سرعت خودرو، ساختار تایر و طرح رویه به عنوان عوامل اصلی مؤثر بر آب پیمایی در تایرها مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. ایشان همچنین، نتایج حاصل از شبیه سازی را با داده های تجربی به دست آمده از آزمون میدانی مقایسه کردند و قابلیت مدل را در این زمینه سنجیدند. اهیشی و همکاران [۷] در یک کار پژوهشی اثر گل رویه را روی (PRCF (plysteer residual cornering force) مطالعه کردند. آنها در این کار اثر ساختار بلت را روی PRCF در نظر گرفته و با تفکیک اثر ساختار از اثر شکل طرح رویه، هر یک را به طور جداگانه تحلیل کردند. مدل ایشان اگرچه کامل بود، اما برای صرفه جویی در زمان و هزینه محاسبات تنها آن بخش از تایر که در تماس با سطح زمین بود با جزئیات کامل مربوط به رویه مدل شد. کوهن و همکاران [۸] نیز مدلی کامل از تایر با طرح رویه را ایجاد و با روش اجزای محدود مورد مطالعه قرار دادند. آنها همچنین، نتایج حاصل از تحلیل خود را با داده های تجربی حاصل از انجام آزمون نیز مقایسه کردند. هدف اصلی آنها شناخت و مطالعه برهم کنش بین رویه و بدنه تایر بود.

ناکاجیما و همکاران [۹] روش بهینه سازی جدیدی را با هدف بهینه کردن شکل رویه بر مبنای یکنواخت کردن توزیع فشار ناحیه تماس و حفظ مقدار سطح جاپا ارائه دادند. آنها نشان دادند که با استفاده از روش ابداعی ایشان می توان طرح رویه را بهینه و باعث بهبود فرمان پذیری، راحتی سرنشین و کاهش سایش نامنظم شد.

چو و همکاران [۱۰] به طور مشخص به ارائه الگوریتمی جدید برای ایجاد شبکه اجزای محدود در تائیری با طرح رویه بسیار پیچیده پرداخته و با مقایسه و بررسی نتایج به دست آمده دقت و صحت روش خود را آزمودند. آنها از نرم افزار ABAQUS برای تحلیل اجزای محدود و فشار ناحیه تماس به عنوان مبنای مقایسه با داده های تجربی استفاده کردند. چو و همکاران [۱۱] همچنین، از همین روش برای مدل سازی دینامیکی و گذرای یک تایر رادیال ۲۰۵/۶۰R۱۵ با طرح رویه نامتقارن استفاده کرده و حرکت تایر را از روی مانعی کوچک شبیه سازی کردند. آنها از نرم افزار ABAQUS در حالت صریح استفاده و نتایج را با

که در اینجا متغیری مجازی (dummy) است، بیان می شود. این معادله به شکل ماتریسی زیر است:

$${}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F\} = 0 \quad (1)$$

که در این معادله  ${}^{t+\Delta t}\{R\}$  و  ${}^{t+\Delta t}\{F\}$  به ترتیب بردار بار اعمال شده و بردار بار محاسبه شده در گره ها هستند. از آنجا که بردار  ${}^{t+\Delta t}\{F\}$  به مقادیر تغییر مکان در گره ها در لحظه  $t+\Delta t$  یعنی  ${}^{t+\Delta t}\{U\}$  وابسته است، بنابراین از روشی تکرار شونده باید استفاده شود و معادله (۱) به شکل زیر نوشته می شود:

$$\{\Delta R\}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\{R\} - {}^{t+\Delta t}\{F\}^{(i-1)} \quad (2)$$

که  $i$  شماره تکرار است و بردار  $\{\Delta R\}^{(i-1)}$  با استفاده از معادله (۳) محاسبه می شود:

$${}^{t+\Delta t}[K]^{(i)}\{\Delta U\}^{(i)} = \{\Delta R\}^{(i-1)} \quad (3)$$

که  ${}^{t+\Delta t}[K]^{(i)}$  ماتریس ژاکوبین (Jacobian) یا ماتریس سفتی مماسی (tangent stiffness matrix) در تکرار شماره  $i$  است. با محاسبه  $\{\Delta U\}^{(i)}$  از معادله (۳) به راحتی بردار تغییر مکان (تغییر شکل تاپر) به کمک معادله (۴) به دست می آید:

$${}^{t+\Delta t}\{U\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{U\}^{(i-1)} + \{\Delta U\}^{(i)} \quad (4)$$

روش تکرار شونده گفته شده که بنام نیوتن - رفسن مشهور است، باید تا جایی که مقدار  $\{\Delta U\}^{(i)}$  به سمت صفر میل کند (همگرایی) ادامه یابد. در عمل، تکرار محاسبات تا جایی ادامه می یابد که شرط زیر برقرار شود:

$$\left| \{\Delta U\}^{(i)} \right| \leq \varepsilon_d \left| {}^{t+\Delta t}\{U\}^{(i)} \right| \quad (5)$$

که  $\varepsilon_d$  مقدار رواداری (معمولاً ۰/۰۱-۰/۰۰۱) است.

### مدل اجزای محدود

تاپر مورد مطالعه در این کار پژوهشی یک تاپر رادیال سیمی با اندازه ۱۸۵/۶۵R۱۴ ساخت داخل بود که بدنه اصلی (carcass) آن از یک لایه ریون، دو لایه بت با الیاف فولادی با زاویه ۲۰ درجه و دو لایه نهایی ساخته شده از الیاف نایلون تشکیل شده است. شکل ۱ جانمایی تاپر مزبور را به همراه اجزای تشکیل دهنده آن نشان می دهد. در مرحله پیش پردازش از نرم افزارهای Geostar [۲۰] برای ساخت مدل اجزای محدود بلوک های رویه و ABAQUS/CAE [۲۱] برای ساخت مدل سایر نواحی استفاده شد. محاسبات اجزای محدود در مرحله پردازش به کمک

داده های تجربی نیز مقایسه کردند. در این کار آنها اثر سرعت غلتش و فشار باد داخلی را نیز مورد مطالعه قرار دادند. ماندل و همکاران [۱۲] با استفاده از روش کلی - جزئی اثر هشت طرح مختلف گل را روی PRCF مطالعه کردند. همچنین، نتایج شبیه سازی را با مقادیر تنش ناحیه تماس که به طریق تجربی روی درام تست اندازه گرفته شده بود، مقایسه و نشان دادند که بین آنها شباهت بسیار زیادی برقرار است. چو و همکاران [۱۳] نیز از مدل اجزای محدود سه بعدی تاپر با طرح رویه استفاده کرده و با تلفیق آن با نرم افزار روش حجم محدود به بررسی مسئله آب پیمایی پرداختند. آنها با مقایسه نتایج حاصل از شبیه سازی با داده های تجربی که شامل جریان آب خروجی از میان شکاف های رویه، فشار هیدرودینامیکی و نیروی تماسی بودند، دقت و صحت مدل خود را تأیید کردند.

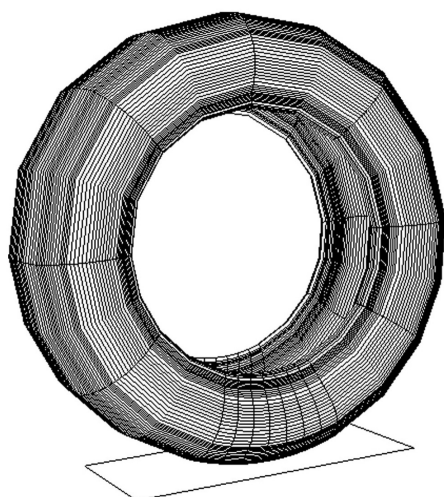
قریشی [۱۴] نیز یک مدل اجزای محدود سه بعدی تاپر با طرح رویه از یک تاپر ۱۷۵/۷۰R۱۴ را به طور کامل ایجاد و آن را به کمک نرم افزار ABAQUS مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در این کار با مقایسه نتایج با داده های تجربی و مدل مشابه همین تاپر که در آن از طرح رویه صرف نظر شده بود، نشان داده شد که برای سنجش برخی پارامترها نیازی به استفاده از مدل های پیچیده طرح رویه نیست. در مقابل پارامترهایی (همانند توزیع فشار ناحیه تماس) وجود دارند که برای محاسبه دقیق آنها باید حتماً طرح رویه در مدل تاپر لحاظ شود. ناراسیم ها نیز [۱۵] پدیده گرمایی و پیش بینی توزیع دما را در یک تاپر در حال غلطش پایدار بررسی کرد و در آن اثر پترن را در نظر گرفته و نتایج را با حالتی مقایسه کرد که در آن اثر طرح گل صرف نظر شده بود. در کار جدیدی نیز چو و همکاران [۱۶] فرایند ترمزگیری روی سطح خیس را در تاپر به کمک تلفیقی از روش تحلیلی و روش عددی شبیه سازی کردند. آنها از روش حجم محدود در فضای اولری برای حل مسئله جریان آب و اجزای محدود لاگرانژی صریح برای محاسبات مکانیکی تاپر بهره جسته و ترمزگیری تاپر در حالت استفاده از سامانه ABS را مدل کرده و نیز نتایج را با داده های تجربی مقایسه کردند.

### شبیه سازی رایانه ای تاپر

#### معادلات اجزای محدود غیرخطی

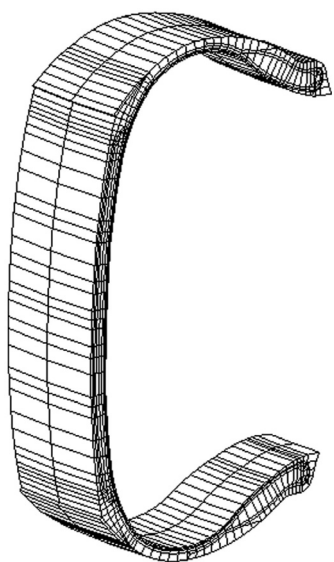
مدل سازی تاپر زیر بار به دلیل بروز پدیده های غیرخطی که شامل تغییر شکل های بزرگ، رفتار غیرخطی مواد و تماس است، باید با مدل اجزای محدود غیرخطی انجام شود. نظریه معادلات اجزای محدود غیرخطی به تفصیل در مقالات پیشین [۱۷-۱۹] مورد بحث و بررسی قرار گرفتند. بنابراین، در اینجا تنها خلاصه ای از این معادلات ارائه می شود. معادله اصلی در تحلیل اجزای محدود غیرخطی ایستا برحسب زمان



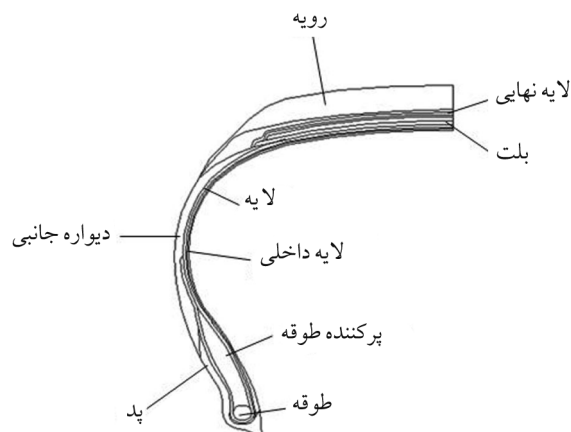


شکل ۳- شبکه اجزای محدود سه بعدی تایر بدون طرح رویه.

دقت بیشتر در منطقه تماس تایر با زمین از تعداد اجزای بیشتری نسبت به سایر نواحی استفاده شده که در شکل ۳ نشان داده شده است. اما ساخت مدل ۲ به دلیل وجود طرح رویه مستلزم طی مراحل بیشتری است. برای ساخت این مدل ابتدا مدل دو بعدی اجزای محدود نشان داده شده در شکل ۲ اصلاح و اجزای ناحیه رویه آن حذف شد. سپس حول محور چرخ به مقدار ۱۰ درجه دوران داده شد تا قطاع ۱۰ درجه‌ای سه بعدی از تایر بدون رویه ایجاد شود (شکل ۴). از طرف دیگر مدل هندسی بلوک‌های تشکیل دهنده رویه تایر نیز جداگانه ایجاد و با استفاده از اجزای سه بعدی شبکه بندی شد که در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. بدین ترتیب تعدادی زیرمدل (sub-model) از بخش‌های مختلف تایر

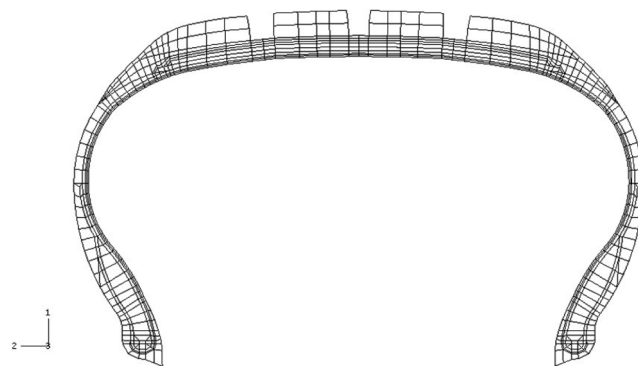


شکل ۴- قطاع ۱۰ درجه‌ای تایر بدون رویه.

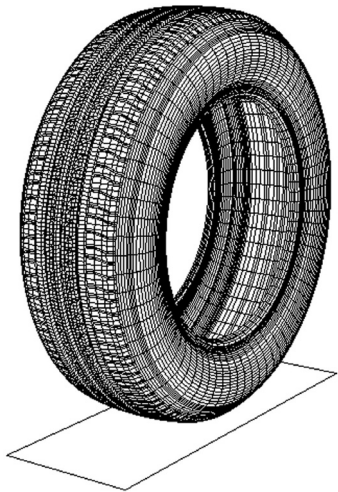


شکل ۱- جانمایی اولیه اجزای تایر.

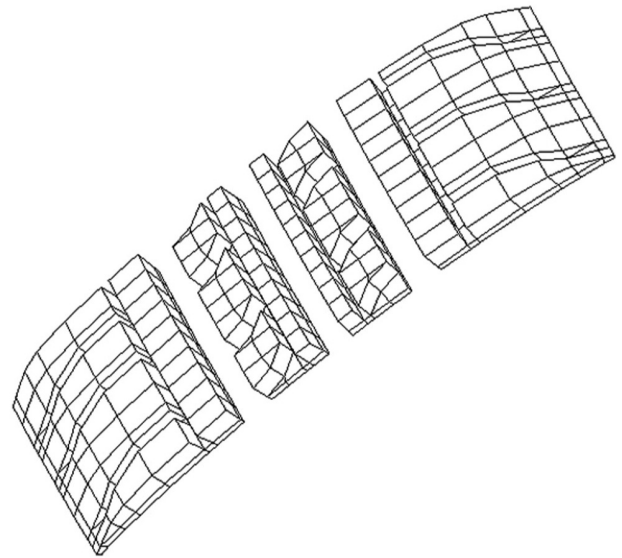
نرم افزار ABAQUS/Standard انجام شد و از نرم افزار ABAQUS/Viewer نیز برای مرحله پس پردازش استفاده شد. دو مدل اجزای محدود سه بعدی از این تایر ساخته و تحلیل شد که از آنها با نام مدل‌های ۱ و ۲ یاد می‌شود. در مدل ۱ از طرح رویه صرف نظر شده و تنها چهار خط ساده به عنوان نمادی از رویه تایر در نظر گرفته شد. در مدل ۲ طرح کامل رویه لحاظ و تحلیل جابا با در نظر داشتن شکل کامل اجزای تشکیل دهنده گل تایر انجام شد. ساخت هر دو مدل، بر مبنای مدل دو بعدی متقارن محوری ایجاد شده از مقطع تایر بود که در شکل ۲ نشان داده شده است. در ساخت این مدل از دو نوع اجزا استفاده شد. بدین ترتیب که برای مدل کردن بخش‌های لاستیکی از اجزای چهار گره‌ای CGAX4H و برای مدل کردن الیاف تقویت کننده از اجزای میله‌ای (rebar) قرار داده شده در اجزای صفحه‌ای SFMGAX1 (از مجموعه اجزای نرم افزار ABAQUS) استفاده شد. مدل ۱ از چرخش مدل دو بعدی نشان داده شده در شکل ۲ حول محور دوران چرخ ساخته شد که در آن برای حصول به



شکل ۲- شبکه اجزای محدود دو بعدی متقارن محوری تایر.



شکل ۷- شبکه اجزای محدود سه بعدی تایر ۳۶۰ درجه‌ای همراه با طرح رویه.



شکل ۵- شبکه اجزای محدود بلوک‌های رویه.

پیچیدگی اشکال بلوک‌های موجود در طرح رویه تایر عملاً امکان ایجاد یک شبکه اجزای محدود برای ناحیه رویه که در فصل مشترک با سایر بخش‌ها از لحاظ تعداد گره‌ها و اجزای یکسان و همخوان باشند، وجود ندارد. علاوه بر آن چون هر بلوک به طور جداگانه شبکه بندی می‌شود، امکان عدم همخوانی بین شبکه اجزای بین بلوک‌ها نیز وجود دارد. برای رفع این مشکل، از الگوریتم اتصال (tie) استفاده می‌شود. بدین ترتیب که ابتدا سطوحی که با یکدیگر در تماس بوده و نیز اجزای ناسازگار دارند، شناسایی و سپس یکی از آنها به عنوان سطح اصلی (master) و دیگری سطح فرعی (slave) در نظر گرفته شده و بین آنها الگوریتم اتصال تعریف می‌شود. در این الگوریتم فرض می‌شود که تمام درجات آزادی روی سطح فرعی دارای همان مقداری باشند که نقطه مشابه آنها (از لحاظ موقعیت فضایی و هندسی) در روش سطح اصلی داراست.

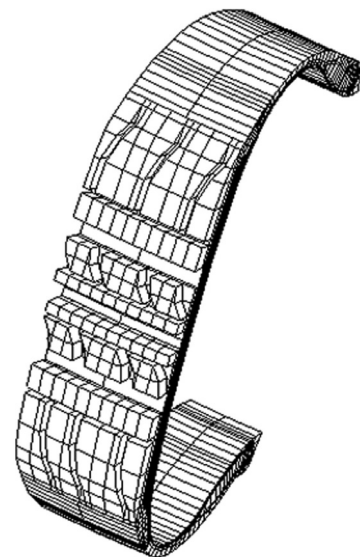
#### مدل رفتار مواد

از مدل کشسان خطی (با مدول یانگ  $E$  و ضریب پواسون  $\nu$ ) برای بیان رفتار اجزای تقویت کننده (نخ‌های مصرفی و الیاف فولادی) و مدل

جدول ۱- تعداد گره و اجزا در مدل‌های اجزای محدود ایجاد شده.

تعداد اجزا	تعداد گره	مدل اجزای محدود
۱۰۵۲	۸۷۹	دو بعدی متقارن محوری
۱۵۷۸۱	۲۶۳۷۱	سه بعدی بدون طرح رویه
۸۶۰۴۱	۸۷۷۶۹	سه بعدی با طرح رویه

تشکیل و روی هم سوار شد تا قطعاً ۱۰ درجه‌ای کامل از تایر حاوی بلوک‌های رویه ایجاد شد (شکل ۶). سپس، این قطع حول محور چرخش تایر به شکل تناوبی دوران داده شد، تا در نهایت مدل سه بعدی کامل تایر همراه با جزئیات طرح رویه تشکیل شود که در شکل ۷ نشان داده شده است. تعداد گره‌ها و اجزای مورد استفاده در ساخت مدل‌های یاد شده در جدول ۱ آورده شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تعداد اجزا و گره‌ها در مدل سه بعدی با طرح رویه به مراتب بیشتر از مدل ساده است. بنابراین، اجرای مدل با طرح ساده رویه نیاز به زمان و منابع سخت افزاری به مراتب کمتری نسبت به مدل با طرح رویه دارد. مهم‌ترین مسئله‌ای که باید در این جا در نظر گرفت آن است که به دلیل



شکل ۶- قطع ۱۰ درجه‌ای تایر همراه با بلوک‌های رویه.

کرنش،  $\mu$  مدول برشی اولیه و  $\lambda_m$  ضریب کشیدگی قفل شده (locking stretch) است. مقدار اخیر کمیته است که در آن شیب نمودار تنش-کرنش افزایش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد. برای به کارگیری این مدل داده‌های حاصل از آزمون تنش - کرنش برای آمیزه‌های مختلف با برازش غیرخطی مورد پردازش قرار گرفته و پارامترهای  $\mu$  و  $\lambda_m$  به دست آمده که در جدول ۲ به همراه ضرایب کشسان الیاف مصرفی در تایر داده شده‌اند.

### شرایط مرزی و بارگذاری

تایر مورد بحث طی دو مرحله بارگذاری شد. بدین ترتیب که در مرحله اول زیر فشار باد داخلی (۳۵/۵psi) (۰/۲۴۵MPa) قرار گرفته و سپس بار عمودی ایستا (۵۳۰ kg) (۵۱۹۴N) به آن وارد و تحلیل گردید. شرط مرزی مورد نیاز به ناحیه طوقه (bead) تایر که در تماس با رینگ قرار می‌گیرد، اعمال شد. بدین ترتیب که در ابتدا فرض شد تا فاصله پاشنه تا پاشنه (heel-to-heel) طوقه به مقدار ۲۵/۴ mm (۱ inch) به یک دیگر نزدیک و سپس در این حالت ثابت و به دنبال آن بارهای گفته شده (فشار باد داخلی و بار عمودی ایستا) به آن اعمال گردد.

### نتایج و بحث

دو مدل اجزای محدود ۱ و ۲ همراه با مدل مواد در شرایط بارگذاری یکسان تحلیل شدند. به منظور ارزیابی مدل‌های اجزای محدود توسعه داده شده در این کار، داده‌های حاصل از شبیه‌سازی با مقادیر اندازه‌گیری شده تجربی مقایسه شدند. آزمون‌های تجربی نیز در دو مرحله بارگذاری زیر فشار باد داخلی و بار عمودی ایستا انجام شدند. (مشابه با آن چه که در شبیه‌سازی انجام شد). بدین ترتیب که در مرحله اول تایر تا فشار داخلی از پیش تعیین شده باد زده و سپس ابعاد اصلی آن شامل قطر خارجی و پهنای بیشینه مقطع اندازه‌گیری شد. در مرحله دوم

جدول ۳- مقایسه بین مقادیر اندازه‌گیری شده و محاسبه شده حالت باد شده تایر با دو مدل.

ابعاد تایر باد شده			محل گزارش
مقادیر تجربی	محاسبه شده با مدل ۱	محاسبه شده با مدل ۲	
۱۸۹/۴	۱۹۲	۱۹۲	پهنای بیشینه مقطع تایر
۵۹۶/۵	۵۹۵	۵۹۵/۵	قطر خارجی

ابركشسان برای بیان رفتار تنش - کرنش مواد لاستیکی استفاده شد. مدل‌های ابرکشسان متعددی تاکنون برای بیان رفتار مواد الاستومری تراکم‌ناپذیر (یا به عبارت بهتر تقریباً تراکم‌ناپذیر) ارائه شده که از مدل ساده تک پارامتری نئوهوکی شروع تا مدل‌های چند پارامتری پیچیده ادامه می‌یابند. مهم‌ترین مسئله در انتخاب این مدل‌ها اطمینان از دقت عمل آنها در پوشش دادن به حالت‌های مختلف بارگذاری کششی، برشی و فشاری است. با توجه به این که در این پژوهش، تنها از آزمون کشش استاندارد ASTM D ۴۱۲ استفاده شد، بنابراین از مدل آرودا - بویس (Arruda-Boyce) [۲۲] بدین منظور بهره گرفته شد. در این مدل نشان داده شده است که داده‌های حاصل از یک آزمون کششی ساده تک محوری از دقت کافی برای مدل کردن قطعه‌ای لاستیکی در حالت‌های مختلف تغییر شکل برخوردار هستند. در این مدل ساختار مولکولی الاستومر به شکل زنجیری با رفتار غیرگوسی (Non-Gaussian) در شبکه در نظر گرفته می‌شوند. در این مدل تابع چگالی انرژی کرنشی (strain energy density) به شکل زیر بیان می‌شود:

$$W = \mu \sum_{i=1}^5 \frac{C_i}{\lambda_m^{2i-2}} (I_1^i - 3^i) \quad (6)$$

$$C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = \frac{1}{20}, C_3 = \frac{11}{1050}, \quad (7)$$

$$C_4 = \frac{19}{7000}, C_5 = \frac{519}{673750}$$

که در این معادله  $W$  چگالی انرژی کرنشی،  $I_1$  اینواریانت اول تانسور

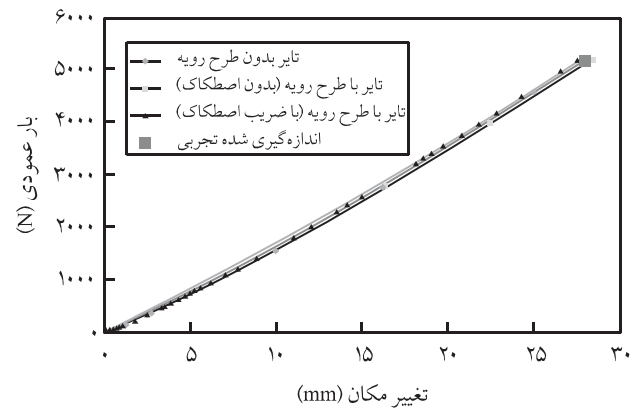
جدول ۲- پارامترهای مدل آرودا - بویس و ضرایب کشسان برای اجزای لاستیکی و تقویتی.

اجزای لاستیکی	پارامترهای مدل آرودا - بویس		اجزای تقویتی	ضرایب کشسان	
	$\lambda_m$	$\mu$ (MPa)		مدول	نسبت پواسون
رویه	۴/۱	۷۸۲	نخ ریون	۵۱۰۰	۰/۳
دیواره جانبی	۳/۶۴	۷۵۷	نخ نایلون	۳۵۰۰	۰/۳
پد	۲/۹۴	۲/۱	سیم فولادی	۲۰۰/۰۰۰	۰/۳
بلت و لایه نهایی	۲/۷۹	۷۸۷	-	-	-
لایه	۲/۹۲	۷۸۲	-	-	-
پرکننده طوقه	۲۵۶۹/۴	۵/۳۵	-	-	-
لایه داخلی	۳/۸	۷۱۵	-	-	-

حرکت راحتی بیشتری را برای سرنشین فراهم کرده و از انتقال ناهمواری‌ها و ارتعاشات جاده می‌کاهد. از سوی دیگر کاهش سفتی عمودی موجب تغییر شکل بیشتر تایر شده و باعث افزایش مقاومت غلتشی (rolling resistance) می‌شود. بنابراین، این کمیت باید برای هر تایر بهینه شود. افزون بر این، دو نکته مهم از این نمودار به دست می‌آید. اول آن که همان‌طور که انتظار می‌رود، تفاوت چندان محسوسی بین رفتار بار - تغییر مکان سه تحلیل گفته شده مشاهده نمی‌شود. دلیل عمده آن است که این رفتار بیشتر تابع شکل هندسی تایر و فشار باد داخلی است و سایر عوامل اثر چندانی روی آن ندارند. نکته دیگر این که برای محاسبه ابعاد تایر زیر بار نیز همانند محاسبات اندازه‌یابی می‌توان از مدل با طرح ساده رویه استفاده کرد. همچنین، مقایسه بین مقادیر محاسبه شده تغییر مکان عمودی تایر با مقدار اندازه‌گیری شده (نشان داده در شکل ۸) نیز تأییدکننده این مطلب است.

مساحت ناحیه جاپا از پارامترهای بسیار مهم هنگام طراحی و سنجش کارایی تایر است. مقدار جاپای محاسبه شده از سه تحلیل پیشتر یاد شده به همراه مقدار اندازه‌گیری شده تجربی آن در جدول ۴ آورده شده‌اند. مقایسه بین این داده‌ها حاکی از آن است که بیشترین اختلاف مربوط به مدل بدون طرح گل (طرح ساده رویه) است. در حالی که با در نظر گرفتن طرح رویه، این اختلاف کاهش قابل ملاحظه‌ای می‌یابد. نکته جالب آن است که لحاظ کردن پدیده اصطکاک به دلیل ممانعت ایجاد شده در حرکت مماسی بلوک‌های رویه باعث کاهش مقدار پیش‌بینی شده مساحت می‌شود و به مقدار حقیقی نیز نزدیک‌تر می‌شود. در این جا برخلاف دو حالت قبل (ابعاد تایر زیر باد و بار) نوع مدل انتخابی اثر زیادی روی دقت محاسبات دارد که لزوم به کارگیری مدل کاملی از تایر را با طرح گل رویه مشخص می‌کند.

توزیع فشار تماسی برای دو مدل یاد شده در شکل‌های ۹-الف تا ج نشان داده شده‌اند. همانند مرحله قبل، مدل تایر با طرح رویه (مدل ۲) در دو حالت با اصطکاک و بدون آن تحلیل شد. شکل ۹-الف توزیع فشار را برای دو مدل با طرح ساده رویه نشان می‌دهد. بیشترین فشار تماسی در نواحی شانه‌های تایر (shoulder) مشاهده می‌شود. همین روند در مدل با طرح رویه که در آن از اصطکاک صرف نظر شده نیز وجود دارد (شکل ۹-ب). افزون بر آن، مشاهده می‌شود که مقدار فشار تماس بیشینه برای



شکل ۸- نمودار بار - تغییر مکان زیر بار عمودی ایستا.

تایر در دستگاه پلانجر قرار گرفت و با صفحه‌ای صلب تماس داده شد. برای تعیین اثر تماس تایر با صفحه مزبور از کاغذ کپی حساس به فشار استفاده شد. با اعمال نیرو به تایر در مقابل صفحه صلب یاد شده، مقادیر نیرو و تغییر مکان عمودی تایر ثبت گردید. پس از اتمام آزمون، کاغذ کپی از محل تماس خارج و مساحت جاپا از روی شکل نقش بسته شده معین شد. در جدول ۳ نتایج مرحله بارگذاری زیر فشار باد داخلی برای مدل‌های مزبور همراه با مقادیر اندازه‌گیری شده تجربی نشان داده شده است. مقایسه بین نتایج تجربی و پیش‌بینی شده حکایت از دقت هر دو مدل دارد. افزون بر آن، اختلاف ناچیز بین دو مقدار پیش‌بینی شده با مدل‌های ۱ و ۲ نیز مبین آن است که در نظر گرفتن اثر طرح رویه در مدل‌سازی اثر چندانی روی نتایج پیش‌بینی شده ندارد. نتایج تحلیل تنش زیر فشار باد داخلی عمدتاً برای حل مسئله اندازه‌یابی تایر (sizing) به کار برده می‌شود.

نمودار بار - تغییر مکان برای تایر مورد نظر در شکل ۸ نشان داده شده است. مدل تایر با طرح رویه دو مرتبه مورد تحلیل قرار گرفت. در تحلیل اول فرض شد که هیچ اصطکاک‌کی بین تایر با سطح تماس وجود ندارد. در حالی که در تحلیل دوم ضریب اصطکاک‌کی معادل ۰/۷ مطابق قانون اصطکاک کولن در نظر گرفته شد. شیب اولیه نمودار بار - تغییر مکان به عنوان سفتی عمودی خوانده شده که معیاری از راحتی و نرمی تایر در حرکت است. هر قدر این کمیت کمتر باشد، در آن صورت تایر هنگام

جدول ۴- مقادیر محاسباتی و اندازه‌گیری شده تجربی مساحت ناحیه جاپای تایر.

مدل	بدون طرح رویه	با طرح رویه (بدون اصطکاک)	با طرح رویه (با اصطکاک)	اندازه‌گیری شده
مساحت (m <sup>2</sup> )	۷۴۷۴×۱۰ <sup>-۲</sup>	۷۳۴۶×۱۰ <sup>-۲</sup>	۷۱۷۷×۱۰ <sup>-۲</sup>	۷۱۲۱×۱۰ <sup>-۲</sup>



که به دلیل ایجاد مقاومت در حرکت تماسی بلوک‌های تایر، توزیع نیروها تغییر کرده به نوعی که بیشینه فشار تماسی متمایل به سمت گوشه‌های بلوک می‌شود. همچنین، به دلیل کاهش مساحت ناحیه تماس (جدول ۴) در مدل با طرح رویه، مقدار فشار تماسی بیشتری نسبت به مدل با طرح ساده به دست آمده است.

## نتیجه‌گیری

در این کار، روشی جدید برای ساخت مدل اجزای محدود تایرهای رادیال با جزئیات طرح رویه معرفی شد. پایه این روش بر مدل‌سازی هندسه ناحیه رویه و سایر نواحی متقارن محوری تایر در دو نرم‌افزار جداگانه و تلفیق آنها قرار دارد. از این مدل برای تحلیل جاپای یک تایر رادیال سیمی با اندازه ۱۸۵/۶۵R۱۴ ساخت داخل استفاده شد. نتایج حاصل از تحلیل اجزای محدود این مدل به همراه مدل با طرح ساده رویه و نیز مقایسه آنها با داده‌های تجربی اندازه‌گیری شده نشان داد که:

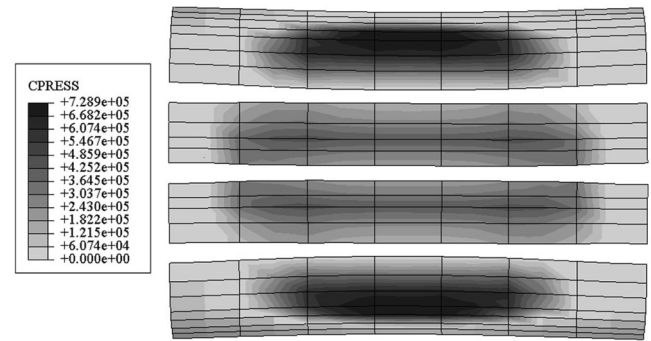
۱- ابعاد تایر بعد از باد شدن و نمودار بار - تغییر مکان تایر در تحلیل جاپا وابستگی ناچیزی به مدل اجزای محدود انتخابی برای ناحیه رویه دارد. به عبارت دیگر، در نظر گرفتن طرح رویه این داده‌ها اثر محسوسی ندارد ضمن آن که زمان اجرا و منابع سخت‌افزاری کمتری مورد نیاز است.

۲- پارامترهای پیچیده‌تر نظیر توزیع فشار ناحیه تماس، شکل و مساحت ناحیه جاپا وابسته به مدل اجزای محدود ناحیه رویه است که برای حصول به جواب‌های دقیق باید جزئیات رویه حتماً در مدل لحاظ شود.

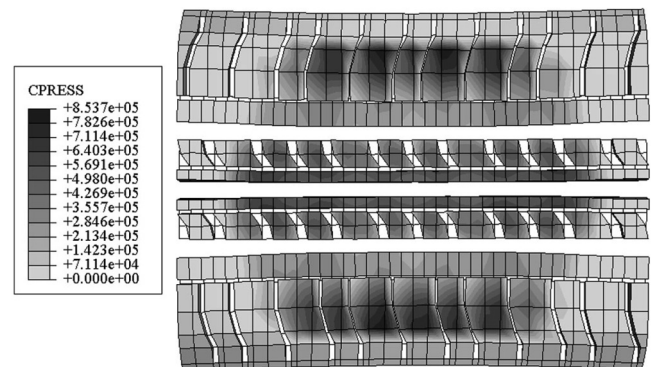
۳- در نظر گرفتن پدیده اصطکاک بین رویه و سطح تماس حتی در حالت ایستا به دلیل کنترل حرکت بلوک‌های رویه حائز اهمیت است و نمی‌توان از آن صرف نظر کرد.

## قدردانی

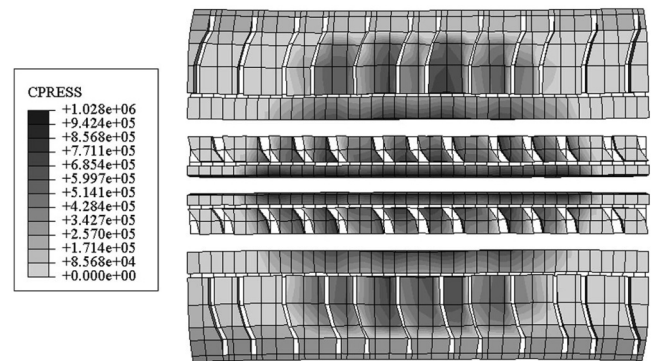
از معاونت توسعه و تحقیقات گروه صنعتی بارز به دلیل حمایت مادی از اجرای این طرح و همچنین کارشناسان بخش طراحی و مرکز آزمون مجتمع صنایع لاستیک کرمان به دلیل در اختیار گذاشتن داده‌های مورد نیاز و نیز انجام آزمون‌های اندازه‌گیری ابعادی و جاپای تایر تشکر و قدردانی می‌شود.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۹- توزیع فشار تماسی (Pa) برای مدل‌های مختلف: (الف) بدون طرح رویه، (ب) با طرح رویه بدون اصطکاک و (ج) بدون طرح رویه با ضریب اصطکاک برابر ۰/۷.

هر بلوک در مرکز همان بلوک به دست آمده است. این نکته قبلاً نیز به شکل نظری و تجربی نشان داده شده بود [۱۴، ۲۳]. اما، در نظر گرفتن پدیده اصطکاک توزیع فشار ناحیه تماس را همان‌طور که در شکل ۹-ج نشان داده شده به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. علت این امر آن است

## مراجع

- Gall R., Tabaddor F., Robbins D., Majors P., Sheperd W. and Johnson S., Some Notes on the Finite Element Analysis of Tires, *Tire Sci. Technol.*, **23**, 175-188, 1995.
- Campanac P., Nonami K. and Duhamel D., Application of the Vibration Analysis of Linear Systems with Time-Periodic Coefficients to the Dynamics of a Rolling Tyre, *J. Sound Vibrat.*, **231**, 37-77, 2000.
- Mancosu F., Sangalli R., Cheli F., Ciarlariello G. and Braghin F., Mathematical-Physical 3D Tire Model for Handling/Comfort Optimization on a Vehicle: Comparison with Experimental Results, *Tire Sci. Technol.*, **28**, 210-232, 2000.
- Seta E., Nakajima Y., Kamegawa T. and Ogawa H., Hydroplaning Analysis by FEM and FVM: Effect of Tire Rolling and Tire Pattern on Hydroplaning, *Tire Sci. Technol.*, **28**, 140-156, 2000.
- Shiraishi M., Yoshinaga H., Miyori A. and Takahashi E., Simulation of Dynamically Rolling Tire, *Tire Sci. Technol.*, **28**, 264-276, 2000.
- Okano T. and Koishi M., A New Computational Procedure to Predict Transient Hydroplaning Performance of a Tire, *Tire Sci. Technol.*, **29**, 2-22, 2001.
- Ohishi K., Suita H. and Ishihara K., The Finite Element Approach to Predict the Ply Steer Residual Cornering Force of Tires, *Tire Sci. Technol.*, **30**, 122-133, 2002.
- Koehne S.H., Matute B. and Mundl R., Evaluation of Tire Tread and Body Interactions in the Contact Patch, *Tire Sci. Technol.*, **31**, 159-172, 2003.
- Nakajima Y., Takahashi F. and Abe A., Surface Shape Optimization of Tire Pattern by Optimality Criteria, *Tire Sci. Technol.*, **31**, 2-18, 2003.
- Cho J.R., Kim K.W., Yoo W.S. and Hong S.I., Mesh Generation Considering Detailed Tread Blocks for Reliable 3D Tire Analysis, *Adv. Eng. Softw.*, **35**, 105-113, 2004.
- Cho J.R., Kim K.W., Jeon D.H. and Yoo W.S., Transient Dynamic Response Analysis of 3-D Patterned Tire Rolling Over Cleat, *Eur. J. Mech. A-Solid*, **24**, 519-531, 2005.
- Mundl R., Fischer M., Wajroch M. and Lee S.W., Simulation and Validation of the Ply Steer Residual Aligning Torque Induced by the Tyre Tread Pattern, *Vehicle Syst. Dyn.*, **43**, 434-443, 2005.
- Cho J.R., Lee H.W., Sohn J.S., Kim G.J. and Woo J.S., Numerical Investigation of Hydroplaning Characteristics of Three-Dimensional Patterned Tire, *Eur. J. Mech. A-Solid*, **25**, 914-926, 2006.
- Ghoreishy M.H.R., Finite Element Analysis of the Steel-Belted Radial Tyre with Tread Pattern under Contact Load, *Iran. Polym. J.*, **15**, 667-674, 2006.
- Narasimha Rao K.V., Kumar R.K., Bohara P.C. and Mukhopadhyay R., A Finite Element Algorithm for the Prediction of Steady-State Temperatures of Rolling Tires, *Tire Sci. Technol.*, **34**, 195-214, 2006.
- Cho J.R., Lee H.W. and Yoo W.S., A Wet-Road Braking Distance Estimate Utilizing the Hydroplaning Analysis of Patterned Tire, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **69**, 1423-1445, 2007.
- Ghoreishy M.H.R., Finite Element Analysis of a 6.45-14 Bias Tire under Contact Load, *Iran Polym. J.*, **10**, 45-52, 2001.
- Ghoreishy, M.H.R., A Numerical Study on the Non-linear Finite Element Analysis of a Tire under Axisymmetric Loading, *Iran. Polym. J.*, **11**, 325-332, 2002.
- Ghoreishy, M.H.R., Modelling the Nonlinear Deformation in Steel-Belted Radial Tires under Inflation Loading, *Iran. Polym. J.*, **12**, 57-65, 2003.
- COSMOS/M, Command Reference, Version 1.75, 1995.
- ABAQUS, Version 6.6, 2006.
- Arruda E.M. and Boyce M.C., A Three-Dimensional Constitutive Model for the Large Stretch Behavior of Rubber Elastic Materials, *J. Mech. Phys. Solid*, **41**, 389-412, 1993.
- Ghoreishy, M.H.R., Steady State Rolling Analysis of a Radial Tyre: Comparison with Experimental Results, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: *J. Automobile Eng.*, **220**, 713-721, 2006.